

1. Valjasti kolesi s polmeroma  $r_1$  in  $r_2$  sta pritrjeni na skupno os. Po njunih obodih sta napeljana vrvi, na katerih visita uteži z masama  $m_1$  in  $m_2$ . S kolikšnim kotnim pospeškom se vrtita kolesi? Skupni vztrajnostni moment koles in gredi je  $J$ .

Newtonov zakon za uteži in vrtenje koles:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1$$

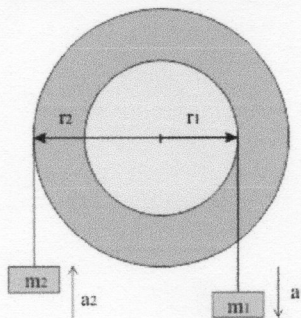
$$F_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

$$r_1 F_1 - r_2 F_2 = J \alpha$$

$$\text{Velja še } \alpha = a_1/r_1 = a_2/r_2$$

Sledi:

$$\alpha = (r_1 m_1 g - r_2 m_2 g) / (J + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

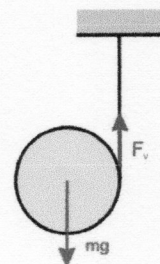


2. S kolikšnim pospeškom pada na vrv navito vreteno?

$$a = g/(1+J/mr^2) = \text{konst} \quad \rightarrow h = v^2/2a = v^2/2g \cdot (1+J/mr^2)$$

$$mgh = mv^2/2 \cdot (1+J/mr^2) = mv^2/2 + J\omega^2/2 = mv_T^2/2 + J_T\omega^2/2$$

Potencialna energija se spremeni v translacijsko kinetično težišča in rotacijsko energijo okoli težišča.



3. Telo z maso  $m_1$  po vodoravni gladki podlagi vleče preko škripca speljana vrvi, na kateri visi utež z maso  $m_2$ . Pri tem vrvi ne drsi po škripcu. Polmer in vztrajnostni moment škripca sta  $r$  in  $J$ . Določi pospešek uteži!

Na utež z maso  $m_2$  delujeta teža in sila vrvi  $F_{v2}$ :

$$m_2 g - F_{v2} = m_2 a$$

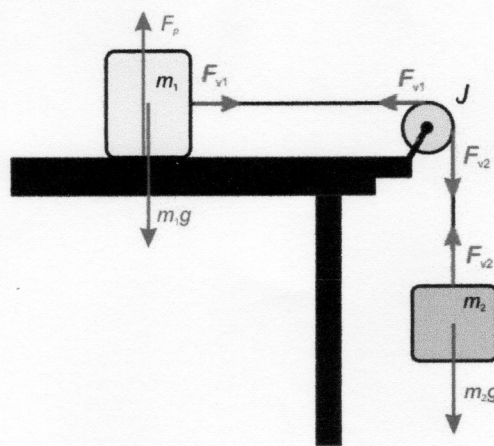
Telo z maso  $m_1$  na podlagi pospešuje sila  $F_{v1}$ , (ki je manjša od sile  $F_{v2}$  zaradi pospeševanja škripca).

$$\text{Velja } F_{v1} = m_1 a.$$

$$\text{Za škripec velja } (F_{v2} - F_{v1})r = J \alpha \quad a = r \alpha$$

Pospešek spuščanja uteži je:  $a = m_2 g / (m_1 + m_2 + J/r^2)$  □

Škripca ni treba upoštevati, če je  $J/r^2 \ll m_1 + m_2$ .



4. Kolo v obliki valja z maso 2 kg in polmerom 0,5 m se vrti s kotno hitrostjo  $2 \text{ s}^{-1}$ .
- S kolikšnim stalnim navorom moramo delovati nanj, da se ustavi po enem obratu?
  - Kolikšno delo pri tem opravimo?

$$A = \Delta W_k$$

$$M\varphi = \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_0^2 / 2 = m r^2 \omega_0^2 / 4$$

$$M = \frac{1}{2} J \omega_0^2 / \varphi = \frac{1}{2} m r^2 \omega_0^2 / 2\varphi = m r^2 \omega_0^2 / 4 \quad \varphi = 1/4\pi \cdot \text{Nm} = 0,08 \text{ Nm}$$

$$A = \Delta W_k = 0 - \frac{1}{2} J \omega_0^2 = -\frac{1}{2} m r^2 \omega_0^2 / 2 = -m r^2 \omega_0^2 / 4 = -\frac{1}{2} J$$

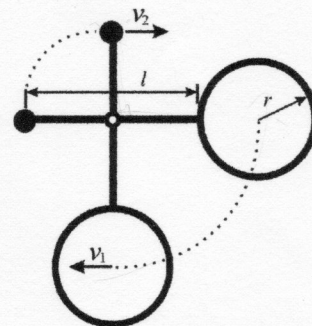


5. Na robu okrogle plošče z maso 100 kg in polmerom 3 m, ki se lahko vrti okoli navpične središčne osi, stoji človek z maso 80 kg. Ta ustrelj s puško vodoravno pravokotno na polmer plošče. Izstreljena krogla ima maso 10 g in hitrost 800 m/s. S kolikšno kotno hitrostjo se začne vrteti plošča s človekom? Človeka obravnavaj kot točkasto telo.

$$m_1 v_1 R = \left( mR^2 + \frac{MR^2}{2} \right) \omega \quad \omega = \frac{\frac{m_1 v_1}{R}}{m + \frac{M}{2}} = 0,0205 \text{ rad/s} = 1,2^\circ / \text{s}$$

7. 10 m visok telefonski drog prežagamo v višini 2 m od tal. S kolikšno hitrostjo udari vrh droga ob tla? Padajoči del se vrti okoli točke, kjer je drog bil prežagan.

8. Na konec  $l=1$  m dolge palice, vrtljive okoli središča, pritrdimo majhno kroglico, na drug konec pa tanek obroč z radijem  $r=0,5$  m. Masa kroglice je  $m_1=1$  kg, masa obroča  $m_2=2$  kg in masa palice  $m_3=1$  kg. Palico z obročem in kroglico postavimo vodoravno ter ju spustimo. Kako hitro ( $v_1$ ) se giblje središče obroča in kako hitro ( $v_2$ ) se giblje kroglica, ko je palica z obročem in kroglico v navpični legi?



Predpostavimo, da je v začetku potencialna in kinetična energija vseh teles enaka nič, ter zapišimo:

$$0 = -m_2 g \left( \frac{l}{2} + r \right) + m_1 g \frac{l}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \text{ kjer je } J \text{ vztrajnostni moment:}$$

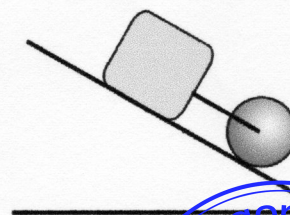
$$J = m_1 \left( \frac{l}{2} \right)^2 + m_2 r^2 + m_2 \left( \frac{l}{2} + r \right)^2 + \frac{m_3 l^2}{12} = 2,833 \text{ kgm}^2.$$

$$\text{Sledi, da je } \omega = 3,2 \frac{1}{\text{s}},$$

$$\text{hitrost } v_1 = \omega \left( \frac{l}{2} + r \right) = 3,2 \text{ m/s in hitrost } v_2 = \omega \frac{l}{2} = 1,6 \text{ m/s.}$$

9. Z iste višine spustimo po klanecu navzdol valj, obroč in kroglo. Kolikšno je razmerje njihovih hitrosti ob vznožju klanca?

10. Na klanecu z naklonom  $30^\circ$  mirujeta kvader z maso 7 kg in krogla z maso 5 kg, ki sta med sabo povezana z lahko palico, ki veže težišče kvadra in gred krogle. S kolikšnim pospeškom se gibljeta telesi po klanecu, če je koeficient trenja med kvadrom in podlago 0,2?



①

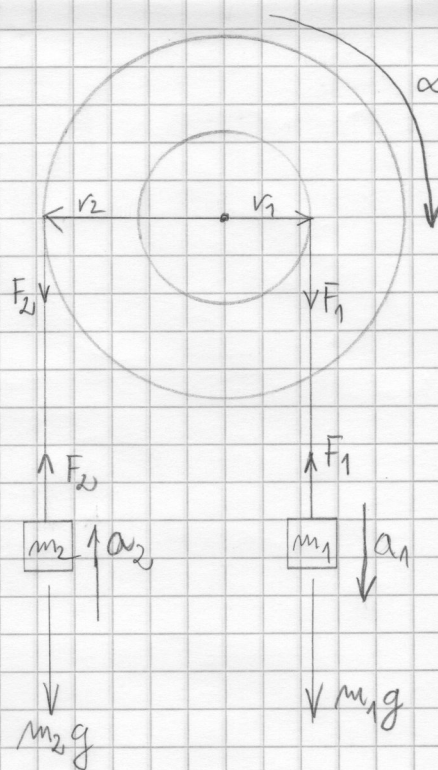
$$F_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1$$

$$a_1 = \alpha \cdot r_1$$

$$a_2 = \alpha \cdot r_2$$

$$\alpha = ?$$



$$\sum M = J \cdot \alpha$$

$$F_2 r_2 - F_1 r_1 = J \cdot \alpha$$

$$F_1 = m_1 g - m_1 a_1 \Rightarrow F_1 = m_1 g - m_1 \cdot \alpha \cdot r_1$$

$$F_2 = m_2 g + m_2 a_2 \Rightarrow F_2 = m_2 g + m_2 \cdot \alpha \cdot r_2$$

$$r_2 (m_2 g + m_2 \alpha \cdot r_2) - r_1 (m_1 g - m_1 \cdot \alpha \cdot r_1) = J \cdot \alpha$$

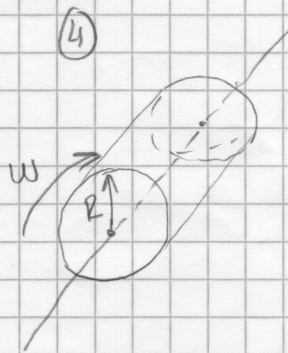
$$r_2 m_2 g + r_2^2 m_2 \alpha - r_1 m_1 g + r_1^2 m_1 \alpha = J \cdot \alpha$$

$$r_2 m_2 g + r_1 m_1 g - \alpha (r_2^2 m_2 + m_1 r_1^2 - J) = 0$$

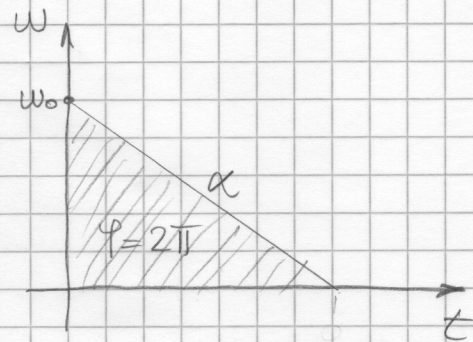
$$-\alpha = \frac{-r_1 m_1 g - r_2 m_2 g}{-r_2^2 m_2 - m_1 r_1^2 - J}$$

$$\alpha = \frac{r_2 m_2 g + r_1 m_1 g}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J}$$





$$M = J \cdot \alpha$$



$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\varphi$$

$$0 = \omega_0^2 - 2\alpha\varphi$$

$$2\alpha\varphi = \omega_0^2$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{2\varphi}$$

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$R = 0,5 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$\varphi = 2\pi$$

$$2\pi = 360^\circ = 1 \text{ obrat}$$

$$M = J \cdot \alpha$$

$$J_{\text{mas}} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$M = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2\varphi}$$

$$A = M \cdot \varphi$$

$$A = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2}$$

$$A = \Delta W_k$$

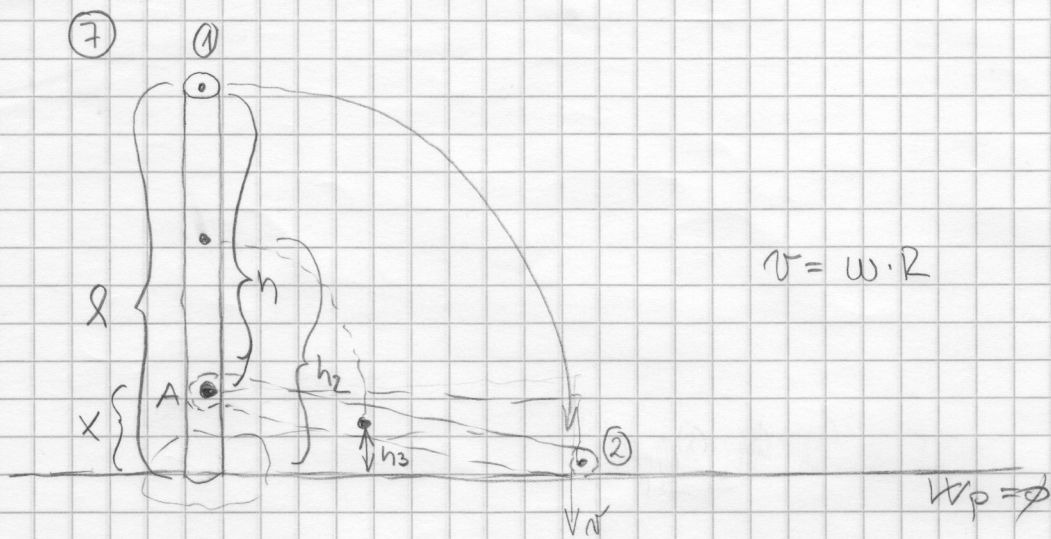
$$M\varphi = \frac{m r^2 \omega_0^2}{4}$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm}$$

$$M = \frac{m r^2 \omega_0^2}{4\varphi} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2}{4 \cdot 2\pi} = 0,0795 \text{ Nm}$$

$$A = \frac{m r^2 \omega_0^2}{4} = 0,5 \text{ J} \quad \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J}$$

negativno delo



$$l = 10 \text{ m}$$

$$v = ?$$

$$x = 2 \text{ m}$$

$$h = 8 \text{ m}$$

①

$$W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2}$$

$$W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$$

$$h_2 = x + \frac{h}{2} = 2 + 4 = 6 \text{ m}$$

$$h_3 = \frac{x}{2} = 1 \text{ m}$$

$$mgh_2 = mgh_3 + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$J = \frac{1}{12} m l^2 + m \left( \frac{h}{2} \right)^2$$

$$2mgh_2 = J \cdot \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{2mgh_2}{J}$$

$$\omega^2 = \frac{2mg(h_2 - h_3)}{m \left( \frac{l^2}{12} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right)}$$

$$\omega^2 = \frac{2g(h_2 - h_3)}{\frac{l^2}{12} + \frac{h^2}{4}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_3)}{\frac{l^2}{12} + \frac{h^2}{4}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_3)}{\frac{l^2}{12} + \frac{h^2}{4}}} = 2,144$$

$$\omega = 2,144$$

$$v = \omega \cdot R = 17,152 \text{ m/s}$$

