Univerza v Mariboru,
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

MATEMATIKA
1. letnik VSŠ

MATEMATIKA II
TEORIJA

Maribor, 2012

Univerza v Mariboru,
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

MATEMATIKA
1. letnik VSŠ

Matematika II

VPRAŠANJA IN ODGOVORI ZA 1. KOLOKVIJ

Avtor:
Gregor Nikolić

Maribor, 2012

Kazalo

UVOD

Gradivo obsega (informativna, neuradna) vprašanja za prvi kolokvij pri predmetu Matematika II, drugega semestra na Fakulteti za Elektrotehniko, Računalništvo in Informatiko v Mariboru, smer Elektrotehnika VS.

Gradivo se sme uporabljati v namene izobraževanja in se ga nikakor ne sme reproducirati ali spreminjati v komercialne namene brez soglasja avtorja.

1. Matrični račun

1.1 Kakšne lastnosti imata seštevanje matrik in množenje matrik s skalarjem?

1.1.1 Seštevanje matrik:

$$A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right]$$
$$\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] := \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$$

Istoležne člene seštevamo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4+5 \\ 6+(-3) & 3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Množenje matrik s skalarjem

$$\lambda\left[a_{ij}\right] = \left[\lambda a_{ij}\right]$$

$$\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Vsak element matrike posebej pomnožimo s skalarjem.

1.1.3 Lastnosti operacij

$\forall A, B \in \mathbb{F}^{m,n}$ *(Za vsak A in B, ki sta elementa matrike* $\mathbb{F}^{n,m}$*) velja*:

($F^{m,n}$ - matrika, razsežnosti m-vrstic in n-stolpcev, katere elementi so elementi množice $\mathbb{F}\left(\mathbb{F}\begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases}\right)$)

1. Komutativnost $A + B = B + A$
2. Asociativnost $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $\exists!0 \in \mathbb{F}^{m,n}$ $A + 0 = A$ $\forall A \in \mathbb{F}^{m,n}$ (obstaja natanko en element 0, ki je element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$, da velja $A + 0 = A$, za vsak element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$).

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $\forall A \in \mathbb{F}^{m,n} \quad \exists!(-A) \in \mathbb{F}^{m,n} \quad A+(-A)=0$ (Za vsak A, ki je element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$ obstaja natanko en $-A$, da velja $A+(-A)=0$)
   $\Rightarrow$ **komutativna (Abelova) grupa:**

Za poljubne $A, B \in \mathbb{F}^{n,m}$ (člene A, B, ki so elementi matrike $\mathbb{F}^{m,n}$) in $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ velja:
1. $\lambda A = A\lambda$
2. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
3. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (pazimo s katere strani množimo, saj ni nepomembno!)
4. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (enako kot pri prejšnjem pravilu pazimo smer množenja!)
5. $1 \cdot A = A$

(Zaradi prej naštetih lastnosti (1.-4. in 1.-5.) je $\mathbb{F}^{m,n}$ vektorski prostor za operaciji seštevanje in množenje s skalarjem).

1.2 Pojasni, kako je definiran matrični produkt. Kako velike matrike nasploh lahko med seboj množimo?

Matrični produkt obstaja natanko takrat, ko je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike, v nasprotnem primeru produkt ne obstaja!

$A \in \mathbb{F}^{m,x}$ in $B \in \mathbb{F}^{x,n}$, kadar množimo dve matriki, si je najbolj zapisati obe v formatu:

$$\underset{m\,x}{A}\,\underset{x\,n}{B} \Rightarrow \underset{2\,3}{A}\,\underset{3\,7}{B}$$

Števili 3 in 3 na sredini med matrikama nam povedo, da lahko matriki množimo, prvo in zadnje število (2 in 7) pa nam povedo razsežnost nove matrike, torej bo nova velikosti 2×7.

Matriki množimo tako, da prvo vrstico množimo s prvim stolpcem. Množimo istoležne člene in jih med seboj seštejemo, tako dobimo prvi člen nove matrike. Bolj nazorno je videti na primeru:

$$\underset{2\,2}{A}\cdot\underset{2\,3}{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left((a_{11}b_{11})+(a_{12}b_{21})\right) & \left((a_{11}b_{12})+(a_{12}b_{22})\right) & \left((a_{11}b_{13})+(a_{13}b_{23})\right) \\ \left((a_{21}b_{11})+(a_{22}b_{21})\right) & \left((a_{21}b_{12})+(a_{22}b_{22})\right) & \left((a_{21}b_{13})+(a_{22}b_{23})\right) \end{bmatrix}$$

Množenje matrik *»ročno«* je zamudno, množiti je še smiselno majhne matrike, za množenje večjih matrik pa raje napišemo program, kateri izračuna produkt.

1.3 Naštej vsaj 3 računske lastnosti matričnega produkta.

Lastnosti matričnega produkta

1. Asociativnost $(AB)C = A(BC)$ (Zakon o združevanju faktorjev)
2. Distributivnost
   a. $(A+B)C = AC + BC$
   b. $A(B+C) = AB + AC$
3. Na splošno je zelo pomemben vrstni red množenja, tako komutativnost tukaj ne velja!
   a. $AB \neq BA$
   b. Če velja komutativnost $AB = BA$ potem pravimo, da matriki komutirata (obstajajo le redki primeri).

1.4 Katere posebne vrste kvadratnih matrik poznaš? Kakšna je vloga identitete?

Poznamo:

1. Diagonalna matrika

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Krajši zapis: $D = diag(d_1,\ d_2,\ ...,\ d_n)$

2. Skalarna matrika (poseben primer diagonalne)

$D_\lambda = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n)\ \ \lambda \in \mathbb{F}$

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Skalarne matrike komutirajo z vsemi matrikami, velja: $D_\lambda A = AD_\lambda = \lambda A$ $\forall A \in \mathbb{F}^{n,n}$

3. Enotska ali nevtralna matrika (identiteta)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enotska matrika I je nevtralni element za množenje. Pomeni, da kakorkoli množimo neko matriko z nevtralnim elementom, se matrika ne spremeni.

$IA = AI = A \quad \forall A \in \mathbb{F}^{n,n}$

Običajni zapis skalarne matrike: $D_\lambda = \lambda I$

4. Zgoraj in spodaj trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix} \textit{Spodaj trikotna}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix} \textit{Zgoraj trikotna}$$

Če množimo s spodaj ali zgoraj trikotno matriko, bo zmnožek oz. nova matrika ravno tako trikotna, zgoraj oz. spodaj, odvisno s katero smo množili.

Identiteta je nevtralni element za množenje, uporabljamo ga za reševanje matričnih enačb. Primer:

$$AB - 2 = C\,,\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2I = C$$

$$2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5 Kako je definirana inverzna matrika?

Inverzna matrika matrike $A \in \mathbb{F}^{n,m}$ je takšna matrika A^{-1}, da velja slednje:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Matrika za katero obstaja inverzna matrika, se imenuje **regularna** ali **obrnljiva** matrika. V nasprotnem primeru je **singularna**.
Primer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ker inverz obstaja je matrika A **regularna**.

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ inverz te matrike ne obstaja, zato je matrika **singularna**.

Velja če je matrika A regularna, je matrika A^{-1} **enolično določena**.

1.6 Kaj lahko poves o produktu obrnljivih matrik?

Če sta matriki A in B regularni, je regularen tudi produkt in velja:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Velja tudi, da je inverz regularne matrike regularen:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

2. Sistemi linearnih enačb

2.1 Naštej elementarne transformacije Gaussove metode.

Elementarne transformacije so preproste manipulacije z enačbami linearnega sistema ali vrsticami razširjene matrike, ki sistem privedejo na ekvivalentnega.

$$AX = B \quad [A|B] := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & b_2 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Elementarne transformacije:
- Zamenjava vrstnega reda enačb (vrstic)
- Množenje i-te enačbe (vrstice) z neničelnim α
- K i-ti enačbi (vrstici) prištejemo α-kratnik j-te enačbe (vrstice)

Matriki A in B sta vrstično (enačbeno) ekvivalentni, če lahko s pomočjo elementarnih transformacij prevedemo matriko A na B ali obratno. Zapis s simboli: $A \sim B$.

2.2 Kakšna je stopničasta in kakšna je reducirana stopničasta matrika?

Stopničasto matriko dosežemo tako, da pod t.i. **pivoti** dosežemo ničle. S tako urejeno matriko dosežemo enostavno rešljiv sistem enačb.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivoti so na zgornji matriki odebeljeni in obarvani rdeče. Vrstice vedno uredimo tako, da ima vsaka naslednja vrstica več ničel kot prejšnja. *Kjer pivota ni, tam se nahaja parameter, kaj to je in zakaj se uporablja bomo spoznali pri Gaussovi eliminacijski metodi.*

Reducirana stopničasta matrika je matrika, kjer prevedemo vse pivote na 1 in naredimo nad pivoti ničle.

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Opiši Gaussovo metodo za reševanje sistemov linearnih enačb.

Iz podanega sistema enačb zapišemo matriko, katero razširimo in s pomočjo eliminacijskih metod pod pivoti ustvarimo ničle. Že to je dovolj za pridobitev rešitev enačb, lahko pa uredimo tako, da prevedemo pivote na 1. S tem dosežemo lažjo rešitev rešitev enačb. Sistem je mogoče še bolj poenostaviti, tako, da nad pivoti ustvarimo ničle, takrat pa samo beremo rešitve posamezne neznanke, a vendar je včasih lažje brez tega.
Primer:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & -1 \\ -2x_1 & - & -2x_2 & & & & & & 3x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 3 \end{array}$$

Razširjena matrika tega sistema je:

$$\left[A \mid B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

S tako zastavljeno matriko, bi sedaj s pomočjo eliminacijskih metod pod pivoti ustvarili ničle in nato izpisali rešitve sistemov enačb.

2.4 Sistem linearnih enačb zapiši v obliki matrične enačbe (na splošno).

Primer sistema enačb:

$$\begin{array}{lllllll} a_1x_1 & + & b_1x_2 & + & c_1x_3 & = & d_1 \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & + & c_2x_3 & = & d_2 \\ a_3x_1 & + & b_3x_2 & + & c_3x_3 & = & d_3 \\ a,b,c,d \in \mathbb{F} \end{array}$$

Zapis v obliki matrike:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & | & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & | & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & | & d_3 \end{bmatrix}$$

2.5 Opiši rešljivost sistema linearnih enačb v odvisnosti od rangov.

Število neničelnih vrstic matrike, se imenuje **rang matrike**. Zapišemo tudi $r(A)$.

Primer:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A)=3$$

$$\left[A \mid B\right]=\begin{bmatrix} 1 & 5 & | & 2 \\ 1 & 8 & | & 3 \\ 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{gathered} r\left(\left[A \mid B\right]\right)=4 \\ r(A)=4 \\ r(B)=4 \end{gathered}$$

Rang osnovne matrike mora biti vedno enak rangu razširjene matrike. V kolikor pridemo do situacije, da je rang razširjene matrike večji od ranga osnovne matrike, je sistem nerešljiv, protisloven.

Primer protislovnega sistema:

$$\left[A \mid B\right]=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$r(A)=2$$
$$r(B)=3$$

Vidimo, da je rang matrike B večji od ranga matrike A, pomeni da je sistem nerešljiv oz. protisloven.

Če izpišemo zadnji sistem enačb vidimo, da je

$$0+0+0=5,$$

za kar pa vemo, da ne drži.

Velja:

$$r(A)=r\left(\left[A \mid B\right]\right)=: r$$

a) $r=n$, (n - število neznank) vse neznanke so vodilne, pomeni da je sistem enolično rešljiv

b) $r<n$, sistem ima $n-r$ prostih neznank oziroma ima $(n-r)$ – parametrično rešitev.

2.6 Opiši Gauss-Jordanovo metodo za računanje inverzne matrike.

Dana matrika matriki A je taka matrika, ki zadošča enačbama $AX = I$ in $XA = I$. Dano matriko A razširimo z enotsko matriko I, ter z eliminacijskimi transformacijami tako dolgo urejamo matriko, da dosežemo na mestu osnovne matrike enotsko matriko. Nova podoba razširjene matrike je inverz osnovne matrike. Bolj razumljivo bo na primeru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ /:2 \quad / \cdot (-2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sledi, da je inverz matrike:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Če povzamemo; najprej privedemo matriko na spodaj trikotno, nato prevedemo pivote na enice ter nato še dosežemo ničle nad pivoti. S tem dosežemo na levi strani identiteto oz. enotsko matriko, na desni strani pa se nam pojavi inverz matrike.

2.7 Matriko A pretvori v reducirano stopničasto obliko, nato zapiši splošno trditev homogenega sistema AX = 0, kjer je X matrični stolpec.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz slednje matrike lahko zadnjo vrstico odmislimo, saj je enačba trivialna ($0+0+0=0$). Zamislimo si, da je prvi stolpec spremenljivka x, drugi y ter tretji z.

Najprej preuredimo matriko v reducirano stopničasto, spomnimo se, pivote prevedemo na enice ter pod in nad njimi ničle.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ / \cdot (-2) \quad /:2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriko smo reducirali na stopničasto, kjer imamo dva pivota (označena z rdečo), *pivot* v drugi vrstici ne obstaja zato je tam parameter, katerega bomo označili s črko $y = a$.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow x-2y=0 \Rightarrow x=2a \\ \Rightarrow \quad 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z=0 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$AX = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

3. Determinanta

3.1 Kako je definirana determinanta?

Determinanta nam omogoča ugotoviti ali je matrika obrnljiva ali ne oz. ali obstaja zanjo inverz. Inverz matrike obstaja takrat kadar determinanta je različna od nič.
Determinanta je definirana:

Naj bo $A = \left[a_{ij}\right]$ dana $n \times n$ - velika kvadratna matrika, potem je **determinanta** kvadratne matrike A število, ki ga dobimo kot vsoto vseh možnih produktov po n elementov matrike tako, da je v vsakem produktu natanko po en faktor iz vsake vrstice in iz vsakega stolpca. Produkti so pomnoženi še z (-1), če ustrezajo lihim permutacijam.
Primer:

$$A =: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sledijo permutacije možnih kombinacij. Koliko je možnih kombinacij je določeno z n-to fakulteto elementov. Zapišimo vse možne permutacije:

$$\begin{array}{cccccccc} S_3 = & \left\{\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}\right. & \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} & \left.\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}\right\} & \\ & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & \textit{št. transpozicij} \end{array}$$

Sedaj člene zgolj beremo navpično, kot je zapisano. Torej bomo množili in seštevali člene:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - \left(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32}\right)$$

Predznak posameznega zmnožka določa število transpozicij za posamezno permutacijo. Če je število transpozicij liho je predznak negativen, če je sodo je predznak pozitiven.

3.2 Naštej vsaj 4 računske lastnosti determinante.

1. $\det A = \det A^T$; posledica tega je, da vse kar velja za vrstice velja tudi za stolpce in obratno.
2. Determinanta (zgoraj ali spodaj) trikotne matrike je enako produktu diagonalnih elementov.
3. Determinanta spremeni predznak, če v matriki zamenjamo med seboj dve vrstici (stolpca).
4. Determinanta matrike, ki ima dve vrstici (stolpca) med seboj enaki, je enaka 0.
5. Determinanta v kateri sta dve vrstici (stolpca) proporcionalni je enaka 0.
6. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, če je matrika A velikosti $n \times n$.
7. Determinanta je multiplikativna $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

3.3 Karakterizacija obrnljivih/singularnih matrik s pomočjo determinante.

Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Naslednje trditve so med seboj ekvivalentne:

1. A je obrnljiva (nesingularna, je regularna)
2. Homogeni sistem $AX = 0$ ime le ničelno rešitev, oziroma $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
3. A je po vrsticah podobna identični matriki (identiteti, enotski matriki).

V kolikor velja ena od naštetih trditev, veljata tudi ostali dve.

3.4 Kako se determinanto razvije po vrstici ali stolpcu?

Determinanto lahko razvijamo po vrstici ali stolpcu, najbolje je izbrati takšno vrstico oz. stolpec, kateri vsebuje največ ničelnih elementov, saj nam na ta način odpade največ členov.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Razvoj bomo delali po vrstici:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Dobljene matrike se imenujejo poddeterminante, katerih determinante računamo naprej, tokrat je to enostavno saj je rang le teh 2. V kolikor bi bil rang večji bi nadaljevali s postopkom.

Sledi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - (a_{32}a_{23})\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - (a_{31}a_{23})\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22})\right)$$

Predznak pred posamezno poddeterminanto določamo po šahovskem pravilu. Elementi pred posamezno poddeterminanto se imenujejo kofaktorji, katere označimo z a_{ij}. Sledi:

$$\left[(-1)^{i+j}\right] = \begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3.5 Kako se s pomočjo determinante izračuna inverzno matriko?

S pomočjo determinante izračunamo inverz matrike:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T}$$

Poddeterminanta k elementu a_{ij}, je determinanta matrike, ki jo dobimo, če črtamo vrstico in stolpec matrike A, označimo $\det A_{ij}$

Kofaktor k elementu a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

$\tilde{A}$... matrika, katere elementi so ustrezni kofaktorji k elementu matrike A.

Velja tudi v kolikor je determinanta matrike enaka nič, da inverz matrike ne obstaja.

A^{-1} ne obstaja $\Leftrightarrow \det A = 0$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 2(-8-3) + 7(1-12) = -99$$

Izračunajmo po prejšnjem pravilu inverz matrike:

$A^{-1} = ?$

Uporabili bomo: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T}$ in $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -8 - 3 = -11$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = -(-4 - 18) = 22$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 12 = -11$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -(-7) = 7$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = -8 - 42 = -50$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -14$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -(6 - 7) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

Sledi zapis po enačbi: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-99} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 22 & -11 \\ 7 & -50 & -2 \\ -14 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Vidimo, da po enačbi je potrebno matriko še transponirati, torej je popolni zapis inverza matrike sledeč:

$$A^{-1} = \frac{1}{-99} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 7 & -14 \\ 22 & -50 & 1 \\ -11 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

3.6 Zapiši Kramerjev izrek (o rešitvah sistema linearnih enačb s pomočjo determinant).

Naj bo A kvadratna matrika. V kolikor je determinanta matrike različna od nič, je sistem $AX = B$ enolično rešljiv, rešitev $X = [x_1, x_2 \dots x_n]^T$, pa se izraža tako:

$$x_i = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \dots n$$

Pri čemer je d enako $\det A$, število d_i, pa je determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo i-ti stolpec s stolpcem B.
Primer:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5\\6\\9\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=6-2-2(6-1)+4-2=-4$$

Sedaj zamenjamo prvi stolpec matrike A s stolpcem matrike B, nato drugega in nato še tretjega ter izračunamo za posameznega determinanto:

$$d_1=\begin{vmatrix}5&2&1\\6&2&1\\9&2&3\end{vmatrix}=-4,\ d_2=\begin{vmatrix}1&5&1\\2&6&1\\1&9&3\end{vmatrix}=-4,\ d_3=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&2&6\\1&2&9\end{vmatrix}=-8$$

Sledijo rešitve sistema:

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{-4}{-4}=1,\ x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{-4}{-4}=1,\ x_3=\frac{d_3}{d}=\frac{-8}{-4}=2$$