

Seštevanje matrik:

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$$

Množenje matrik s skalarjem

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Lastnosti operacij

$\forall A, B \in \mathbb{F}^{m,n}$ (Za vsak A in B , ki sta elementa matrike $\mathbb{F}^{m,n}$) velja :

($\mathbb{F}^{m,n}$ - matrika, razsežnosti m -vrstic in n -stolpcev, katere elementi so elementi množice $\mathbb{F} \left(\begin{matrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{matrix} \right)$)

1. Komutativnost $A + B = B + A$
2. Asociativnost $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\exists! 0 \in \mathbb{F}^{m,n} \quad A + 0 = A \quad \forall A \in \mathbb{F}^{m,n}$ (obstaja natanko en element 0, ki je element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$, da velja $A + 0 = A$, za vsak element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$).

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $\forall A \in \mathbb{F}^{m,n} \quad \exists! (-A) \in \mathbb{F}^{m,n} \quad A + (-A) = 0$ (Za vsak A , ki je element matrike $\mathbb{F}^{m,n}$ obstaja natanko en $-A$, da velja $A + (-A) = 0$)
 \Rightarrow **komutativna (Abelova) grupa:**

Za poljubne $A, B \in \mathbb{F}^{m,n}$ (člene A, B , ki so elementi matrike $\mathbb{F}^{m,n}$) in $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ velja:

1. $\lambda A = A \lambda$
2. $(\lambda \mu) A = \lambda (\mu A)$
3. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ (pozimo s katere strani množimo, saj ni nepomembno!)
4. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$ (enako kot pri prejšnjem pravilu pazimo smer množenja!)
5. $1 \cdot A = A$

Lastnosti matričnega produkta

1. Asociativnost $(AB)C = A(BC)$ (Zakon o združevanju faktorjev)
2. Distributivnost
 - a. $(A + B)C = AC + BC$
 - b. $A(B + C) = AB + AC$
3. Na splošno je zelo pomemben vrstni red množenja, tako komutativnost tukaj ne velja!
 - a. $AB \neq BA$
 - b. Če velja komutativnost $AB = BA$ potem pravimo, da matriki komutirata (obstajajo le redki primeri).

Če sta matriki A in B regularni, je regularen tudi produkt in velja:



$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Velja tudi, da je inverz regularne matrike regularen:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Velja:

$$r(A) = r([A | B]) =: r$$

- $r = n$, (n - število neznank) vse neznanke so vodilne, pomeni da je sistem enolično rešljiv
- $r < n$, sistem ima $n - r$ prostih neznank oziroma ima $(n - r)$ - parametrično rešitev.

- $\det A = \det A^T$; posledica tega je, da vse kar velja za vrstice velja tudi za stolpce in obratno.
- Determinanta (zgoraj ali spodaj) trikotne matrike je enako produktu diagonalnih elementov.
- Determinanta spremeni predznak, če v matriki zamenjamo med seboj dve vrstici (stolpca).
- Determinanta matrike, ki ima dve vrstici (stolpca) med seboj enaki, je enaka 0.
- Determinanta v kateri sta dve vrstici (stolpca) proporcionalni je enaka 0.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, če je matrika A velikosti $n \times n$.
- Determinanta je multiplikativna $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Naslednje trditve so med seboj ekvivalentne:

- A je obrnljiva (nesingularna, je regularna)
- Homogeni sistem $AX = 0$ ima le ničelno rešitev, oziroma $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
- A je po vrsticah podobna identični matriki (identiteti, enotski matriki).

V kolikor velja ena od naštetih trditev, veljata tudi ostali dve.

S pomočjo determinante izračunamo inverz matrike:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$$

Poddeterminanta k elementu a_{ij} , je determinanta matrike, ki jo dobimo, če črtamo vrstico in stolpec matrike A , označimo $\det A_{ij}$

Kofaktor k elementu a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

\tilde{A} ... matrika, katere elementi so ustrezni kofaktorji k elementu matrike A .

Velja tudi v kolikor je determinanta matrike enaka nič, da inverz matrike ne obstaja.

A^{-1} ne obstaja $\Leftrightarrow \det A = 0$

Naj bo A kvadratna matrika. V kolikor je determinanta matrike različna od nič, je sistem $AX = B$ enolično rešljiv, rešitev $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, pa se izraža tako:

$$x_i = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \dots, n$$

Pri čemer je d enako $\det A$, število d_i , pa je determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo i -ti stolpec s stolpcem B .

